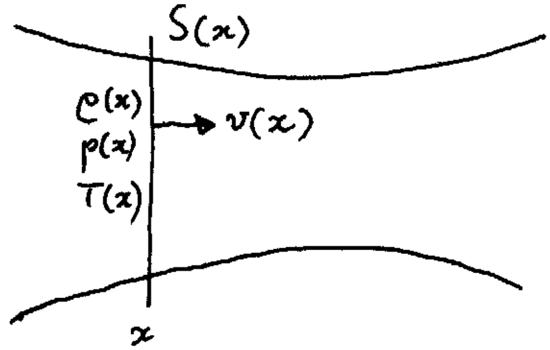
Etude d'une tuyère

Un gaz parfait s'écoule (l'écoulement est permanent) de façon adiabatique réversible (on tentera de justifier plus loin) dans une tuyère à symétrie de révolution, d'axe Ox, de section $S(x)$ lentement variable, de sorte que, d'une part, la vitesse soit partout colinéaire à l'axe Ox et, d'autre part, le problème puisse être considéré comme unidirectionnel en ce sens que les paramètres physiques, masse volumique ρ, pression p, température T et vitesse v, ne dépendent que de l'abscisse x(cf figure).



I. Première approche : on n'a jamais fait de mécanique des fluides mais l'on sait gérer les systèmes ouverts.

Question 1 :
Faire un bilan de masse en introduisant le débit massique D

Entre l'abscisse à l'entrée de la tuyère ($x = 0$) et une abscisse x quelconque, la masse est constante car on est en régime permanent. Le débit massique à l'entrée (indice 0) et celui à l'abscisse x sont donc égaux, soit avec l'expression du débit massique (cf cours) :

$$D = \rho_0\, S_0\, v_0 = \rho(x)\, S(x)\, v(x)$$

Par la suite on supposera S_0 très grand ($S_0 \to \infty$), le débit D fini donc la vitesse v_0 négligeable ($v_0 \to 0$). Les conditions à l'entrée de la tuyère se résument à la donnée du débit massique

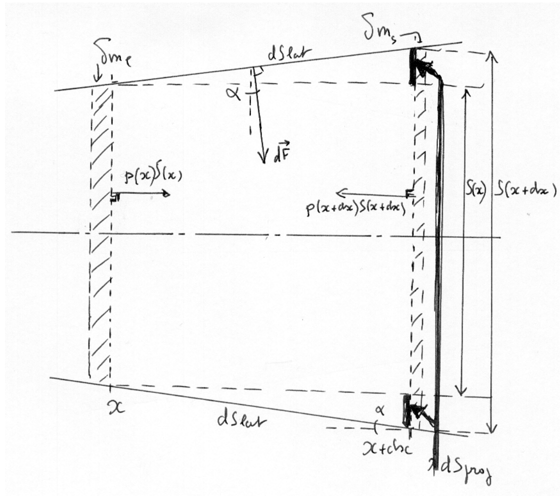
$$D = \rho(x)\, S(x)\, v(x) \qquad \text{(équation 1)}$$

Question 2 :
Faire un bilan de quantité de mouvement entre deux abscisses voisines et sans oublier les forces sur les parois latérales (on ne rougira pas si l'on n'arrive pas à les gérer).

On se choisit comme volume de contrôle (son contenu est un système ouvert) le gaz entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. On se choisit comme système (fermé) le contenu du volume de contrôle plus la masse δm_e qui va y entrer entre t et $t + \mathrm{d}t$, ce qui décrit le système à l'instant t. A l'instant $t + \mathrm{d}t$, il est manifeste que le système se compose du contenu du volume de contrôle et de la masse δm_s qui en est sortie entre t et $t + \mathrm{d}t$. On a bien sûr (cf la question précédente) $\delta m_e = \delta m_s = D\,\mathrm{d}t$.

Intéressons nous à la projection sur Ox de la quantité de mouvement (nous la noterons q) du système. A l'instant t, c'est celle du volume de contrôle («VdC») plus celle de δm_e dont la vitesse est $v(x)$, soit

$$q(t) = q_{VdC}(t) + \delta m_e\, v(x) = q_{VdC}(t) + D\,\mathrm{d}t\, v(x)$$



A l'instant $t + \mathrm{d}t$, c'est celle du volume de contrôle («VdC») plus celle de δm_s dont la vitesse est $v(x + \mathrm{d}x)$, soit

$$q(t) = q_{VdC}(t + \mathrm{d}t) + \delta m_s\, v(x + \mathrm{d}x) = q_{VdC}(t + \mathrm{d}t) + D\,\mathrm{d}t\, v(x + \mathrm{d}x)$$

Puisqu'on est en régime permanent, $q_{VdC}(t + \mathrm{d}t) = q_{VdC}(t)$ et le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en terminant par un développement de Taylor a l'ordre 1 en x :

$$\Sigma F_x = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{q(t + \mathrm{d}t) - q(t)}{\mathrm{d}t} = D\,(v(x + \mathrm{d}x) - v(x)) = D\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Puisque l'on a affaire à un gaz, on peut négliger les forces de pesanteur devant les forces de pression. En projection sur Ox la force de pression sur la face d'entrée est $F(x) = p(x)\, S(x)$ et celle sur la face de sortie est $-F(x + \mathrm{d}x) = -p(x + \mathrm{d}x)\, S(x + \mathrm{d}x)$. Le bilan de ces deux premières forces est

$$F(x) - F(x + \mathrm{d}x) = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\, S(x)]\,\mathrm{d}x$$

Pour la force de pression $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ (composante $\mathrm{d}F_x$ sur Ox) sur la face latérale de surface $\mathrm{d}S_{lat}$ à laquelle on affectera une pression moyenne p_m intermédiaire entre $p(x)$ et $p(x+\mathrm{d}x)$, en appelant α l'angle entre la normale à cette surface et Ox, on a

$$\mathrm{d}F_x = \|\overrightarrow{\mathrm{d}F}\|\,\cos\alpha = p_m\,\mathrm{d}S_{lat}\,\cos\alpha$$

Or $\mathrm{d}S_{lat}\,\cos\alpha$ est l'aire de la projection[1] $\mathrm{d}S_{proj}$ de $\mathrm{d}S_{lat}$ sur un plan orthogonal à Ox, c'est à dire la différence entre les aires de la projection de la face de sortie et celle d'entrée (cf figure), donc

$$\mathrm{d}F_x = p_m\,\mathrm{d}S_{proj} = p_m\,[S(x + \mathrm{d}x) - S(x)] = p_m\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

[1] On calcule une aire fondamentalement en additionnant les aires de rectangles élémentaires. Imaginons que l'on projette sur un plan horizontal l'un de ces rectangles élémentaires d'une surface contenue dans un plan incliné d'un angle α en ayant pris soit que sa largeur ℓ soit horizontale et sa longueur L selon la ligne de plus grande pente. Son aire est $S = L\,\ell$. Dans la projection la largeur ℓ, horizontale, se projette en une largeur ℓ' égale à ℓ et la longueur L inclinée de α se projette en $L' = L\,\cos\alpha$. L'aire de la projection est donc $S' = \ell'\,L' = \ell\,Ł\,\cos\alpha = S\,\cos\alpha$

Puisqu'on cherche la force totale à l'ordre 1 en $\mathrm{d}x$ et que l'expression de $\mathrm{d}F_x$ contient déjà un $\mathrm{d}x$ en facteur, on peut remplacer ici p_m par son expression à l'ordre 0 soit $p(x)$. D'où

$$\mathrm{d}F_x = p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

La dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des trois forces de pression (pour un gaz les forces de pesanteur sont négligeables), donc

$$D\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\,S(x)]\,\mathrm{d}x + p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

$$D\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)\,S(x)] + p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$$

$$D\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} - S(x)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p(x)\,\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -S(x)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

soit en reportant l'expression de D (équation 1) et en simplifiant par $S(x)$

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(équation 2)}$$

Question 3 :
Faire un bilan énergétique sous la forme la plus adaptée entre deux abscisses voisines.

On reprend le même système qu'à la question précédente et en appelant δE_e et δE_s les énergies de δm_e et δm_s, on a

$$E(t) = E_{VdC} + \delta E_e \qquad \text{et} \qquad E(t+\mathrm{d}t) = E_{VdC} + \delta E_s$$

Le système est gazeux, une approche thermodynamique est plus prudente, l'énergie est somme de l'énergie cinétique mésoscopique (c'est-à-dire calculée avec les vitesses observées après «moyennage» de l'agitation thermique, soit $v(x)$ définie dans l'énoncé) et de l'énergie interne, soit en prenant le modèle du gaz parfait à C_v constant (alors $U = n\,C_v\,T$ avec $C_v = R/(\gamma-1)$) et de masse molaire M

$$\delta E_e = \frac{1}{2}\,\delta m_e\,v(x)^2 + \delta n_e\,C_v\,T(x) = \frac{1}{2}\,\delta m_e\,v(x)^2 + \frac{\delta m_e}{M}\,\frac{R}{\gamma-1}\,T(x)$$

et une expression identique pour δE_s, on en déduit aisément avec $\delta m_e = \delta m_s = D\,\mathrm{d}t$ que

$$\frac{E(t+\mathrm{d}t)-E(t)}{\mathrm{d}t} = D\,\left[\frac{1}{2}\,v(x+\mathrm{d}x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x+\mathrm{d}x) - \frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = D\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2 + \frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

Nous allons maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique sous la forme

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_{cin} + \mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{méca}} + \mathcal{P}_{\text{therm}}$$

La puissance mécanique se calcule en multipliant vectoriellement chacune des trois forces de pression par la vitesse associée ; au niveau de la surface latérale, la force de pression est normale et la vitesse de l'écoulement tangentielle, donc la puissance est nulle. Donc

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = F(x)\,v(x) - F(x+\mathrm{d}x)\,v(x+\mathrm{d}x) = p(x)\,S(x)\,v(x) - p(x+\mathrm{d}x)\,S(x+\mathrm{d}x)\,v(x+\mathrm{d}x)$$

En introduisant le débit $D=\rho\, S\, v$ (en x et $x+\mathrm{d}x$) puis l'équation d'état ($p\,V=(m/M)\,R\,T$ d'où $p/\rho=R\,T/M$), on arrive à

$$\mathcal{P}_{\text{méca}}=D\,\left[\frac{p(x)}{\rho(x)}-\frac{p(x+\mathrm{d}x)}{\rho(x+\mathrm{d}x)}\right]=D\,\left[\frac{R\,T(x)}{M}-\frac{R\,T(x+\mathrm{d}x)}{M}\right]=-\frac{D\,R}{M}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

La puissance thermique (cf cours sur la conduction thermique) ne dépend que de la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur de la tuyère ; elle n'est pas proportionnelle au débit. Si le débit est suffisamment important, on peut la négliger devant la puissance mécanique proportionnelle au débit, c'est en ce sens que l'écoulement est adiabatique. On peut reformuler ceci en disant qu'avec un débit important, le temps de traversée de la tuyère est trop court pour que le gaz ait le temps d'échanger de la chaleur avec l'extérieur.

On reporte tous les éléments de calcul dans l'expression du premier principe pour arriver à

$$D\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2+\frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]\,\mathrm{d}x=-\frac{D\,R}{M}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

soit après simplification par $D\,\mathrm{d}x$ et regroupement des termes[2]

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2+\frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)+\frac{R\,T(x)}{M}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2+\frac{R\,\gamma}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)\right]$$

Comme p, ρ et T sont liés par l'équation d'état, ne conservons que deux de ces trois paramètres, les plus pertinents dans cette étude sont p et ρ, on réécrit donc

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\,v(x)^2+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{p(x)}{\rho(x)}\right]$$

On peut exploiter de deux façons, soit on dit que la quantité entre crochets est constante, dont on calcule la valeur en $x=0$ (rappelons que $v(0)=0$ dans l'approximation choisie)

$$\frac{1}{2}\,v(x)^2+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{p(x)}{\rho(x)}=\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{p_0}{\rho_0} \qquad \text{(équation 3)}$$

soit on effectue la dérivation

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p(x)}{\rho(x)}\right)=0$$
$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{\rho(x)}+p(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\rho(x)}\right)\right]=0$$
$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\left[\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\frac{p(x)}{\rho(x)^2}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right]=0$$

qu'on peut réécrire pour plus de ressemblance avec l'équation 2

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\,\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-\frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right] \qquad \text{(équation 4)}$$

[2] Il est classique qu'en regroupant le terme provenant de l'énergie interne massique($\frac{R}{M\,(\gamma-1)}\,T(x)$) et celui provenant de la puissance des forces de pression ($\frac{R\,T(x)}{M}$), on fasse apparaître l'enthapie massique, comme le montre ici la suite du calcul.

Question 4 :
Déduire de ce qui précède que le gaz vérifie la loi de Laplace.

La confrontation de l'équation 2 et de l'équation 4 permet d'affirmer que

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\gamma}{(\gamma-1)}\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$(\gamma-1)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \gamma\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$-1\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \gamma\left[-\frac{p(x)}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$\frac{1}{p(x)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \gamma\,\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln p - \gamma\,\ln\rho) = 0$$

$$\ln p - \gamma\,\ln\rho = \ln\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = Cte$$

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \exp(Cte) = Cte$$

qui est une variante de la loi de Laplace $p\,V^{\gamma} = Cte$ (car $V = m/\rho$ avec m constante). On a donc

$$\frac{p(x)}{\rho(x)^{\gamma}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \qquad \text{(équation 5)}$$

II. Seconde approche : on ne sait pas gérer les systèmes ouverts mais on a déjà fait de mécanique des fluides.

Question 5 :
Comment retrouver les résultats précédents ?

Le raisonnement qui aboutit à l'équation 1 est en fait typique de la mécanique des fluides.

L'équation d'Euler lorsqu'on néglige la pesanteur s'écrit

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v}\right) = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

En régime permanent, avec $\rho = \rho(x)$, $p = p(x)$ et $\overrightarrow{v} = v(x)\,\overrightarrow{e_x}$, on a donc

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x)\,\overrightarrow{e_x}) = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e_x}$$

soit en projection sur Ox

$$\rho(x)\,v(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

qui n'est autre que l'équation 2.

Enfin, si la tuyère est assez longue (elle l'est car $S(x)$ varie lentement, sinon la vitesse ne pourrait pas être considérée comme pratiquement parallèle à l'axe), le gradient thermique est faible (donc transformation adiabatique, car sans gradient thermique pas de transfert thermique) et le gradient de pression aussi (donc réversibilité car ce sont les gradients élevés qui sont fondamentalement source d'irréversibilité). On peut donc appliquer la loi de LAPLACE (équation 5).

Si l'on tient absolument à retrouver l'équation 3 (et sa variante l'équation 4), on la tire de l'équation 2 et de l'équation 5 par le chemin inverse qui à plus haut conduit à la loi de LAPLACE ; et il faut y voir une version de la formule de BERNOULLI (pesanteur négligée) valable pour les gaz évoluant de façon isentropique.

Question 6 :
Montrer que : $D = C^{te}.S(x).f\left(\frac{p(x)}{p_0}\right)$ ***où*** f ***est une fonction à déterminer.***

Nous noterons $\xi(x) = p(x)/p_0$ et allégerons l'écriture en ξ pour $\xi(x)$. On a donc

$$p(x) = \xi\, p_0$$

De l'équation 5 (loi de LAPLACE), on tire aisément

$$\rho(x) = \xi^{\frac{1}{\gamma}}\, \rho_0$$

On reporte dans l'équation 3 et l'on a

$$v(x) = \sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p_o}{\rho_0}\,\left(1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)}$$

On reporte enfin dans l'équation 1

$$D = \xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\rho_0\,S(x)\sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{p_o}{\rho_0}\,\left(1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)} = \sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma - 1}\,p_o\,\rho_0}\;\,S(x)\;\,\xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

Nous noterons $D = K\,S(x)\,f(\xi) = K\,S(x)\,f(p(x)/p_0)$ avec

$$K = \sqrt{\frac{2\,\gamma}{\gamma - 1}\,p_o\,\rho_0} \qquad \text{et} \qquad f(\xi) = \xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

Question 7 :
Étudier la fonction f ***(si, si, c'est possible) ; on prendra*** $\gamma = 1,4$***.***

Pour l'étude de la fonction, remarquons que puisque l'écoulement se fait dans le sens des pressions décroissantes, on a $p(x) < p_0$ donc $\xi < 1$; par ailleurs une pression est positive[3] et l'on va donc étudier $f(x)$ entre $x = 0$ et $x = 1$. D'ores et déja, on a

$$f(0) = f(1) = 0$$

et la dérivée est

$$f'(x) = \frac{1}{\gamma}\,\xi^{\frac{1}{\gamma}-1}\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}} + \xi^{\frac{1}{\gamma}}\,\frac{-(1-\frac{1}{\gamma})\,\xi^{-\frac{1}{\gamma}}}{2\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\gamma}\,\xi^{\frac{1}{\gamma}-1}\,\frac{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}} - \frac{(1-\frac{1}{\gamma})}{2\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}}$$

[3]sauf dans des cas exceptionnels où les forces attractives de VAN DER WAALS l'emportent

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\gamma}\,(\xi^{\frac{1}{\gamma}-1} - 1) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\gamma})}{\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}} = \frac{(\xi^{\frac{1}{\gamma}-1} - 1) - \frac{1}{2}(\gamma - 1)}{\gamma\,\sqrt{1 - \xi^{1-\frac{1}{\gamma}}}}$$

$$f'(x) = \frac{\xi^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{2}}{\gamma\,\sqrt{1 - \xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} = \frac{\left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{2}}{\gamma\,\sqrt{1 - \xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}$$

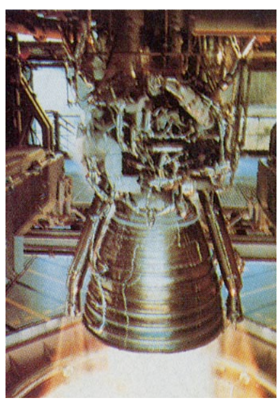
la dérivée f' s'annule et f est donc maximale donc pour

$$\xi = \xi_m = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0,528$$

Question 8 :

En déduire que si la pression de sortie est assez petite la section S commence par décroître puis finit par croître (tuyère convergente-divergente).

Dans la tuyère la pression décroît de p_0 à l'entrée à $p_s = p_{atm}$ en sortie, donc ξ décroît de 1 à $\xi_s = p_s/p_0$. Si ξ_s est supérieur à ξ_m, $f(\xi)$ croît de l'entrée jusqu'à la sortie et, puisque $D = K\,S(x)\,f(\xi)$ avec D et K constants, $S(x)$ décroît. Par contre, toujours de l'entrée vers la sortie, si ξ_s est inférieur à ξ_m, f croît de $\xi = 1$ à $\xi = \xi_m$ puis décroît, donc $S(x)$ décroît puis croît. Comprenons par là que si la forme de la tuyère ne respecte pas cette géométrie convergente-divergente, elle ne pourra pas fonctionner correctement.



Voyez en illustration la partie terminale divergente de la tuyère du moteur d'Ariane ainsi que des cheminées de centrale nucléaire qui se terminent par l'amorce d'une partie divergente.

III. Compléments.

Question 9 :

En pensant à la formule donnant la poussée d'un réacteur, montrer qu'on a intérêt à accélerer le fluide. Préciser le rôle de la tuyère.

N'importe quel cours montre qu'un réacteur d'avion ou de fusée exerce une poussée égale au produit du débit massique par la vitesse d'éjection. A débit donné on a intérêt à avoir la vitesse la plus élevée possible. La tuyère maintient le débit constant et permet par la modification de sa section de modifier la vitesse.

Question 10 :

On introduit la vitesse du son* locale *définie par $c^2 = \gamma p/\rho$ ***puis le nombre de Mach*** $\mathcal{M} = v/c$ ***et montrer que, dans l'étude précédente, on a :*** $\frac{\mathcal{M}^2}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\gamma.p}\frac{dp}{dx} = 0$***. On partira de l'équation d'*Euler**

Partons de l'équation 2

$$\rho(x)\, v(x)\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

remplaçons ρ par $\gamma\, p/c^2$ (cf définition de c) :

$$\frac{\gamma\, p(x)}{c^2}\, v(x)\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

puis $1/c$ par $\mathcal{M}/v$ (cf définition du nombre de Mach)

$$\frac{\gamma\, p(x)\mathcal{M}^2}{v(x)^2}\, v(x)\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$\text{d'où} \qquad \frac{\mathcal{M}^2}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\gamma\, p}\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{(équation 6)}$$

Question 11 :

En utilisant la relation de Laplace et conservation du débit massique sous forme de différentielle logarithmique, montrer que : $(\mathcal{M}^2 - 1)\,\frac{dv}{v} = \frac{dS}{S}$ ***et revisiter la notion de convergent-divergent.***

Prenons la différentielle logarithmique de l'équation 1

$$\rho(x)\, S(x)\, v(x) = D$$

$$\ln \rho(x) + \ln S(x) + \ln v(x) = \ln D$$

$$\frac{1}{\rho(x)}\, \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{S(x)}\, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{v(x)}\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{(équation 7)}$$

et de l'équation 5

$$\frac{p(x)}{\rho(x)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

$$\ln p(x) - \gamma\, \ln \rho(x) = \ln p_0 - \gamma\, \ln \rho_0$$

$$\frac{1}{p(x)}\, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \gamma\, \frac{1}{\rho(x)}\, \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{(équation 8)}$$

En utilisant successivement l'équation 6, l'équation 8 et l'équation 7, on a :

$$\frac{\mathcal{M}^2}{v}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\gamma.p}\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\rho(x)}\, \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{S(x)}\, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{v(x)}\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$(\mathcal{M}^2 - 1)\, \frac{1}{v(x)}\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{S(x)}\, \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$$

$$(\mathcal{M}^2 - 1)\, \frac{dv}{v} = \frac{dS}{S}$$

On veut une accélération donc $\frac{dv}{v}$ positif ; au début les vitesses sont petites donc subsoniques, $\mathcal{M}$ est inférieur à l'unité et $\mathcal{M}^2 - 1$ est négatif donc $\frac{dS}{S}$ et $\mathrm{d}S$ sont négatifs, S décroît : la tuyère converge. Puis la vitesse devient supersonique et les conclusions sont inversées. L'écoulement devient supersonique là où la tuyère est la plus étroite.